

# Išorinės jėgos potencialų poveikis heterogeninės difuzijos procesams

## Influence of External Potentials on Heterogeneous Diffusion Processes

Rytis Kazakevičius, Julius Ruseckas

Vilniaus universitetas, Teorinės fizikos ir astronomijos institutas, Saulėtekio al. 3, 10222 Vilnius  
rytis.kazakevicius@tfai.vu.lt

Brauno judėjimo vidutiniam kvadratiniam nuokrypiui būdinga tiesinė priklausomybė nuo laiko. Tačiau daugelyje sudėtingų sistemų galime stebėti procesus pasižyminčius vidutinio kvadratinio nuokrypio netiesiniu augimu laikui bėgant [1]. Tuomet sakoma, kad sistemoje stebima anomalioji difuzija. Anomalioji difuzija charakterizuojama netiesine vidutinio kvadratinio nuokrypio priklausomybe nuo laiko  $\langle \Delta x \rangle \sim t^\theta$ . Jeigu laipsnio rodiklis  $\theta$  (dar kitaip vadinamas anomaliosios difuzijos eksponente) kinta tarp 1 ir 2 turime taip vadinamą superdifuziją. Pirmą kartą superdifuzija eksperimentiškai buvo stebėta tiriant plastikinių mikrosferų difuziją ant besisukančios plokštelės [2]. Jeigu laipsnio rodiklis  $\theta$  yra mažesnis už vienetą ( $\theta < 1$ ) tai sakome jog turime subdifuziją. Atlikus matematinį modeliavimą buvo pasiūlyta, kad subdifuzija galėtų pasireikšti stebint polimerų difuziją pro nonoporas [3].

Neseniai buvo pasiūlyta, kad abu anomaliosios difuzijas atvejai gali būti modeliuojami kaip heterogeninės difuzijos procesas [4]. Heterogeninės difuzijos procesui būdinga, kad difuzijos koeficientas priklauso nuo difunduojančios dalelės pozicijos. Heterogeninės difuzijos procesas buvo panaudomas modeliuoti polimerų subdifuziją ląstelės citoplazmoje [4, 6].

Heterogeninės difuzijos procesas su difuzijos koeficiento netiesine priklausomybe nuo dalelės koordinatės yra aprašomas Lanževano lygtimi:

$$dx = \sigma|x|^\eta \circ dW_t . \quad (1)$$

$x$  yra dalelės koordinatė,  $\eta$  - triukšmo multiplikatyvumo laipsnio rodiklis, parametras  $\sigma$  - triukšmo intensyvumas ir  $W_t$  - standartinis Vynerio (Wiener) procesas. Stochastinė diferencialinė lygtis (1) buvo interpretuojama pasinaudojant Stratonovičiaus (Stratonovich) interpretacija. Kad supaprastinti skaitmeninį integravimą nuodosime Ito (Itô) interpretaciją:

$$dx = \frac{1}{2}\sigma^2\eta|x|^{2(\eta-1)}xdt + \sigma|x|^\eta dW_t . \quad (2)$$

Pirmasis narys lygties (2) dešinėje pusėje aprašo triukšmo indukuotą dreifą. Pastarasis dreifo narys atsiranda Lanževano lygtyje, aprašančioje Brauno judėjimą nehomogeninėje aplinkoje didelės trinties riboje, atlikus adiabatinę aproksimaciją [7]. Buvo parodyta, kad lygtis (1) generuoja signalus pasižyminčius netiesine vidutinio kvadratinio nuokrypio priklausomybe nuo laiko [8].

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \sim (\sigma^2 t)^{\frac{1}{1-\eta}} . \quad (3)$$

Mes apibendrinome prieš tai aptartą modelį įveddami pa-

pildomą išorinę jėgą

$$dx = \sigma^2 \left( \eta - \frac{\nu}{2} \right) x^{2\eta-1} dt + \sigma x^\eta dW_t . \quad (4)$$

$\nu$  aprašo išorinės jėgos poveikį difunduojančiai dalelei. Parametras  $\nu$  taip pat yra stacionaraus galimų signalo verčių skirstinio eksponentė,  $P_0(x) \sim x^{-\nu}$ , jeigu dalelės difuzija yra apribota intervale  $x \in [x_{min}, x_{max}]$ . Čia  $x_{min}, x_{max}$  yra atspindinčios kraštinės sąlygos atitinkamai ties mažomis ir didelėmis  $x$  vertėmis

Nustatyta, kad anomaliosios difuzijos vidutinio kvadratinio nuokrypio eksponentė nepriklauso nuo išorinės jėgos poveikio. Išorinės jėgos įvedimas tik pakeičia anomaliosios difuzijos koeficiento vertę. Anomalioji difuzija pasireiškia tik parinkus atitinkamas parametrų vertes. Turi būti tenkinamos nelygybės  $\nu < 3$  ir  $\eta < 1$  (ar  $\nu < 1$  ir  $\eta < 1$ ). Įvedimas dar vienos išorinės jėgos neproporcingos triukšmo indukuotam triukšmui nulemia sutrumpėjusį laiko intervalą kur galime stebėti anomaliją difuziją.

*Reikšminiai žodžiai: anomalioji difuzija, heterogeninės difuzijos procesas, Brauno judėjimas*

### Literatūra

- [1] R. Metzler and J. Klafter, Phys. Rep. **339**, 1 (2000)
- [2] T. H. Solomon, E. R. Weeks and H. L. Swinney, Phys. Rev. Lett. **71**, 3975 (1993)
- [3] J. L. A. Dubbeldam, A. Milchev, V. G. Rostishvili and T. A. Vilgis, EPL, **79**, 18002 (2007)
- [4] A. G. Cherstvy, A. V. Chechkin and R. Metzler, New J. Phys. **15**, 083039, (2013)
- [5] A. G. Cherstvy, A. V. Chechkin and R. Metzler, Soft Matter **10**, 1591 (2014)
- [6] T. Kühn, T. O. Ihalainen, J. Hyväluoma, N. Dross, S. F. Willman, J. Langowski, M. Vihinen-Ranta and J. Timonen, PLoS One **6**, e22962 (2011)
- [7] J. M. Sancho, M. San Miguel, and D. Dürr, J. Stat. Phys. **28**, 291 (1982).
- [8] M. Heidernätsch, On the diffusion in inhomogeneous systems, Ph.D. thesis, Technische Universität Chemnitz, Faculty of Sciences, Institute of Physics, Complex Systems and Nonlinear Dynamics (2015).