Medžiaginiai ryšiai klasikinėje ir reliatyvistinėje optikoje GA požiūriu

Classical and relativistic constitutive relations from GA point of view

Adolfas Dargys
[1]Nacionalinis fizinių ir technologijos mokslų centras, Puslaidininkių fizikos institutas, Saulėtekio 3, LT-10257 Vilnius
adolfas.dargys@ftmc.lt

Diferencialinių Maxwell'o lygčių sistema nėra pilna. Ją reikia papildyti medžiaginiais ryšiais tarp pirminių laukų $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$, elektrinio ir magnetinio, ir medžiagoje indukuotų antrinių laukų $(\mathbf{D}, \mathbf{H})$ [1]. Ryšiai gali nusakyti medžiagos inertiškumą ar netiesiškumą ją žadinant, histerezę ir pan. Paprasčiausiu atveju manoma, kad ryšis tarp pirminių laukų $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ ir indukuotų medžiagoje $(\mathbf{D}, \mathbf{H})$ yra momentinis. Klasikinės elektrodinamikos atveju medžiaginiai ryšiai tokiais atvejais užrašomi per 3×3 matricas $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\beta}$ ir $\bar{\mu}^{-1}$ [1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \bar{\varepsilon}\mathbf{E} + \bar{\gamma}\mathbf{B}, \\ \mathbf{H} &= \bar{\beta}\mathbf{E} + \bar{\mu}^{-1}\mathbf{B}. \end{aligned} \tag{1}$$

Kyla klausimas, koks bendriausias tokių matricų pavidalas ir kaip jas konstruoti tuo atveju, kai medžiaga yra homogeniška. Į tokius klausimus leidžia atsakyti Cliffordo (Cl) geometrinė algebra (GA): klasikiniu atveju $Cl_{3,0}$, o reliatyvistiniu atveju $Cl_{1,3}$, kur apatiniai indeksai nusako erdvės (medžiagos) metriką [2]. Mūsų darbuose [2, 3] parodyta, kad elektromagnetinių bangų sklidimo terpėse savybės tokiais atvejais seka iš algebrų $Cl_{3,0}$ ir $Cl_{1,3}$ vidinės sandaros, ir todėl medžiaginiai ryšiai, t. y. matricų $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\beta}$ ir $\bar{\mu}^{-1}$ pavidalas, seka iš GA multivektorių simetrijos savybių. Konkrečiai PT simetrija įskaityta $Cl_{3,0}$, o erdvėlaikio CPT simetrija – $Cl_{1,3}$ algebroje. Darbe [3] pateikti bendri medžiagų saryšiai klasikinės elektrodinamikos atvejui, t. y. kai terpės greitis yra žymiai mažesnis už šviesos greitį, o straipsniuose [4, 5] – reliatyvistinei elektrodinamikai.

Reliatyvistinės eletrodinamikos atveju turime vienintelį lauką, taip vadinamą Faraday'aus lauką medžiagoje $\mathcal{F} = \mathcal{E} + \mathcal{B}$. Geometrinėje algebroje laukai nusakomi bivektoriais (orientuotomis plokštumomis). Plokštumos dydis nusako lauko stiprį, o plokštumos orientacija – lauko kryptį. Matuojami elektrinis $\mathcal{E}$ ir magnetinis $\mathcal{B}$ laukai priklauso nuo stebėtojo. Invariantu išlieka tik ju suma $\mathcal{F}$. Panašiai užrašomas sužadintas medžiagoje laukas, $\mathcal{G} = \mathcal{D} + \mathcal{H} = \chi(\mathcal{F})$, kur χ yra apibendrinta medžiagos juta, kurią galima susieti su medžiaginėmis matricomis $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\beta}$ ir $\bar{\mu}^{-1}$ formulėje (1). Bivektoriai $\mathcal{F}$ ir $\mathcal{G}$ turi po šešias dedamąsias, todėl medžiagos sąryšius yra patogu nusakyti 6×6 matricomos:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D} \\ \mathcal{H} \end{bmatrix} = \left(\left| \begin{array}{c|c} \text{Diel.Birefr.} & \text{Fizeau} \\ \hline \text{Fizeau} & \text{Magn.Birefr.} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c|c} \text{Diel.Faraday} & \text{Opt. Aktyv.} \\ \hline \text{Opt. Aktyv.} & \text{Magn.Faraday} \end{array} \right| \right) \begin{bmatrix} \mathcal{E} \\ \mathcal{B} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Į kiekvieną iš 3×3 blokų įrašėmę po vieną jam charakteringą reiškinį (Fizeau → Fizeau reiškinys, Birefr. → dvejopas lūžimas, Opt. Aktyv. → optinis aktyvumas). Bivektoriai $\mathcal{E}$ ir $\mathcal{D}$ yra erdviškieji, o bivektoriai $\mathcal{B}$ ir $\mathcal{H}$ – laikiškieji, t. y. jų kvadratai yra atitinkamai teigiami/neigiami dydžiai. Taigi 6×6 matricą, kurios pirmoji dalis yra simetrinė, o antroji antisimetrinė, galima interpretuoti kaip bendrojo bivektoriaus $\mathcal{F}$ transformaciją į kitą bivektorių. Kadangi $Cl_{1,3}$ algebra automatiškai įskaito erdvėlaikio simetrijos savybes (CPT simetriją) per involiucijas, atskiri matricų blokai (2) formulėje taip pat pasižymi tam tikromis simetrijos savybėmis, kurios ir nusako mežiagos reliatyvistinius sąryšius. Atitinkamos 6×6 matricos (jų yra penkios) yra suskaičiuotos su geometrine Cliffordo algebra ir pateiktos straipsniuose [4, 5], kurias sudedant įvairiomis kombinacijomis galima gauti pačius įvairiausius medžiaginius sąryšius, kurie seka iš relatyvistinės elektrodinamikos. Iš pateiktų visų galimų reliatyvistinių 6×6 matricų galima sukonstruoti klasikinio pavidalo (1) sąryšius, kurie dažniausiai ir nauduojami bangų sklidimo analizėje. Smulkiai tokie sąryšiai išrašyti [5] darbe. Juos galima palyginti su klasikinės elektrodinamikos ryšiais [3], iš kur seka, kad klasikinė elektrodinamika įskaito ne visus bangų sklidimo reiškinius.

Reikšminiai žodžiai: medžiaginiai sąryšiai, elektromagnetinių bangų sklidimas, Cliffordo algebra

Literatūra

[1] M. Born and E. Wolf, 1999 *Principles of Optics* (Cambridge, CUP), 1999.
[2] A. Dargys, A. Acus, 2015 *Cliffordo geometrinė algebra ir jos taikymai* (UAB Petro ofsetas), 2015.
[3] A. Dargys, Lith. J. Phys. **55**, 92-99 (2015)
[4] A. Dargys, Opt. Comm. **354**, 259-65 (2015)
[5] A. Dargys, arXiv:1609:04261v1, [physics.class-ph] (2016)