Atvirkštiniai multivektoriai šešių dimensijų geometrinėse algebrose

Inverse multivectors in a six dimensional geometric algebras

Artūras Acus[1], Adolfas Dargys[2]
[1]Teorinės fizikos ir astronomijos institutas, Vilniaus universitetas, Saulėtekio 3, LT-10257 Vilnius
[2]Nacionalinis fizinių ir technologijos mokslų centras, Puslaidininkių fizikos institutas, Saulėtekio 3, LT-10257 Vilnius
arturas.acus@tfai.vu.lt

Geometrinė algebra (matematikų vadinama Cliffordo algebra) apibendrina gerai žinomą vektorinį skaičiavimą, kuris plačiai naudojamas fizikoje. Jei vektorinis skaičiavimas tinka tik trimatėms erdvėms, tai įvedus multivektorius su geometrine algebra skaičiavimus galima atlikti bet kokios dimensijos ir signatūros erdvėse, tarp jų ir reliatyvistiame erdvėlaikyje. Svarbus geometrinės algebros elementas yra atvirkštinis multivektorius A^{-1}, kurio sandauga iš multivektoriaus A duoda vienetą.

Bendros formos multivektoriaus atvirkštinio radimas geometrinėje algebroje tebėra iki galo neišspręsta ir labai aktuali problema tiek matematikoje, tiek fizikoje. Kadangi geometrinės algebros elementus visada galima pavaizduoti matricomis, tai iš principo atvirkštinį multivektorių įmanoma rasti perėjus į matricinį vaizdavimą. Tačiau toks kelias nėra natūralus, nes neišnaudoja geometrinei algebrai būdingos rangų struktūros, kuri yra prarandama perėjus į matricinį vaizdavimą. Bendras atvirkštinių multivektorių formules galima būtų užrašyti išskaidžius multivektorių ortogonalioje bazėje. Toks metodas [1] turi keletą didelių trūkumų: 1) išraiškos priklauso nuo pasirinktos bazės, 2) jų sudėtingumas, didėjant algebros dimensijai, auga eksponentiškai, 3) tos pačios dimensijos $n = p + q$, bet skirtingų signatūrų (p, q) geometrinėms algebroms $Cl_{p,q}$ formulės skiriasi.

Tik gerokai vėliau buvo pastebėta [2], kad algebroms, kurių dimensija neviršija penkių, $p+q \leq 5$, atvirkštinius multivektorius galima elegantiškai užrašyti bekordinatėje formoje kaip pradinio mutivektoriaus A ir įvairių jo rango inversijų $A_{\bar{r}}$ (brūkšnelis virš indekso žymi, kad koeficiento prie ranko r bazinių elementų ženklas yra pakeičiamas į priešingą), tam tikrą sandaugą. Pavyzdžiui, algebroms kurių $n = 3$, ši formulė atrodo taip: $A^{-1} = \frac{C(AC)_{\bar{3}}}{AC\,(AC)_{\bar{3}}}$, kur $C = A_{\bar{1},\bar{2}}$. Deja, $n = 6$ algebroms tokio pavidalo formulės iki šiol niekam nepavyko rasti.

Pranešime mes parodome, kad atvirkštinių multivektorių formules visgi galima užrašyti ir didesnės dimensijos algebroms, jei paprastą multivektorių sandaugą pakeisime multivektorių multitiesine kombinacija. Tokią kombinaciją mes išreikštai apskaičiavome $n = 6$ geometrinei algebrai [3]. Kadangi į gautą formulę įeina tik geometrinė sandauga ir rangų inversija (involiucijos operacija), tai ta pati formulė tinka bet kokios signatūros algebroms. Panašiai kaip ir $n = 4$ atveju tokių formulių galima surasti ne vieną. Nors visos jos leidžia apskaičiuoti atvirkštinius, tačiau skaičiavimo efektyvumo požiūriu gerokai skiriasi. Mažiau rango inversijų turinti formulė nebūtinai yra pati efektyviausia. Daugiau involiucijų turinti formulė gali būti spartesnė, nes kiekviename sumos naryje sumažėja galutiniame rezultate išsiprastinančių narių.

Atvirkštinių multivektorių išvedimas yra gan sudėtingas, todėl sunkiai įsivaizduojamas be simbolinės kompiuterinės algebros. Savo darbui mes sukūrėme specialiai tam skirtą *Mathematica* sistemos paketą [4], kuris leidžia greitai ir patogiai sudauginti bet kurios geometrinės algebros multivektorius, o taip pat rasti jų matricinius vaizdavimus. Gautos formulės, kurios yra pateikiamos 1 lentelėje, buvo patikrintos simboliškai ir skaitiškai, apskaičiuojant įvairių algebrų atvirkštinius multivektorius. Išreikštinės formulės taip pat yra labai naudingos nustatant atvirkštinio multivektoriaus egzistavimo sąlygas.

1 lentelė. Bendriausios formos multivektorių atvirkštinių formulių išraiškos geometrinėse algebrose, kurių dimensija $p + q \leq 6$. Kai $p + q = 6$ antroji, daugiau involiucijų turinti formulė, yra spartesnė.

$Cl_{p,q}$	A^{-1}
$p+q=0$	$\frac{B}{AB}, \quad B = 1$
$p+q=1$	$\frac{B(AB)_{\bar{1}}}{AB\,(AB)_{\bar{1}}}, \quad B = 1$
$p+q=2$	$\frac{C}{AC}, \quad C = A_{\bar{1},\bar{2}}$
$p+q=3$	$\frac{C(AC)_{\bar{3}}}{AC\,(AC)_{\bar{3}}}, \quad C = A_{\bar{1},\bar{2}}$
$p+q=4$	$\frac{D}{AD}, \quad D = A_{\bar{2},\bar{3}}(AA_{\bar{2},\bar{3}})_{\bar{1},\bar{4}}$
	arba $\quad D = A_{\bar{1},\bar{2}}(AA_{\bar{1},\bar{2}})_{\bar{3},\bar{4}}$
$p+q=5$	$\frac{D(AD)_{\bar{5}}}{AD\,(AD)_{\bar{5}}}, \quad D = A_{\bar{2},\bar{3}}(AA_{\bar{2},\bar{3}})_{\bar{1},\bar{4}}$
$p+q=6$	$\frac{G}{AG},$
	$G = \frac{1}{3}A_{\bar{2},\bar{3},\bar{6}}\Big(H(HH)_{\bar{1},\bar{4},\bar{5}} + 2\big(H_{\bar{4}}(H_{\bar{4}}H_{\bar{4}})_{\bar{1},\bar{4},\bar{5}}\big)_{\bar{4}}\Big)$
	arba
	$G = \frac{1}{3}A_{\bar{2},\bar{3},\bar{6}}\Big(\big(H(HH_{\bar{1},\bar{5}})_{\bar{4}}\big)_{\bar{1},\bar{5}} + 2\big(H_{\bar{4},\bar{5}}(H_{\bar{4},\bar{5}}H_{\bar{1},\bar{4}})_{\bar{4}}\big)_{\bar{1},\bar{4}}\Big)$
	kur $\quad H = AA_{\bar{2},\bar{3},\bar{6}}$

Reikšminiai žodžiai: Geometrinė (Cliffordo) algebra, atvirkštinis multivektorius, kompiuterinės algebros sistema

Literatūra

[1] J. P. Fletcher, Clifford numbers and their inverses calculated using the matrix representation, in *Applications of Geometric Algebra in Computer Science and Engineering*, edited by L. Dorst, C. Doran, and J. Lasenby, pages 169–178, Birkhäuser Boston, 2002.

[2] P. Dadbeh, Inverse and determinant in 0 to 5 dimensional Clifford algebra, arXiv: 1104.0067 (Mar. 2011).

[3] A. Acus and A. Dargys, submitted to Advances in Applied Clifford algebras

[4] A. Acus and A. Dargys, *Mathematica* package, 2017, https://github.com/ArturasAcus/GeometricAlgebra.